ひといき

−フィボナッチの数列と市場予測−

大阪大学名誉教授　長谷川　晃

1．はじめに

フィボナッチ（Fibonacci; Leonardo Pisano Bigollo, 1170-1240）の数列は、0, 1, から始め、次の数を、前の２つの数の和で表す数列で、0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,…と小学生でも作ることができる。この数列は小説「ダビンチコード」の始まりの部分に、ルーブル美術館の館長が殺害され、その枕元に置かれた暗号数として紹介されたのでご存知の方も多かろう。最近この数列は株価や為替レートなど、マルコフ過程に似たランダムプロセスの予測に使われるため、注目を浴びている。

この数列の面白い点をいくつか挙げると；

１、隣り合わせの二つの数の比が黄金比、すなわち、

$$\left(\sqrt{5}+1\right)/2,\ 約1.6180に近づく。$$

２、この数列に現れる数は自然界の諸現象、花びらの数、３、５、８枚、パイナップルの螺旋の数、８と13、他など多く見られる。

３、この数列は、前の２つの数に依存するため、マルコフ過程と呼ばれる確率過程（親子関係や、株価のように、ランダムな動きをする中で、次に起こる事象の確率が、直前の事象確率に影響されるような確率過程）の予測に利用できる可能性がある。

４、フィボナッチの数は等比級数、つまり、指数関数的に増大する。

などである。

今回はこのフィボナッチの数列の性質を説明し、この数列の性質が米国のように安定的に成長する市場（しじょう）、例えば、NYダウ平均値の推移の長期予想に応用することを考える。

2．フィボナッチの数列と黄金比、指数関数との関係

フィボナッチの数列のn+1番目の数をX_{n+1}と書くと一般にX_{n+1}は定義から

$$X_{n+1}=X_n+X_{n-1}$$

と書くことができる。この数列は数々の面白い性質を持っている。まず、第一に、フィボナッチの数列の数を、前の数で割った数、例えば、8/5(=1.6), 13/8(=1.625), 21/13(=1.615), 34/21(=1.619), 55/34(=1.618), 89/55(=1.618)、144/89(=1.618), ... となり、ある一定の値、1.618...に近づくことである。このことの証明は簡単で、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_{n+1}}{X_n}\equiv G=\lim_{n\to\infty}\frac{X_n+X_{n-1}}{X_n}=1+\frac{1}{G}$$

したがってGは

$$G^2=G+1$$

を満たし、２次方程式の性質から

$$G=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1.61803399...$$

を得る。面白いことに、この値Gは有名な黄金比を表す。黄金比は、ある矩形の縦横の長さの比を表す数字で、その矩形の短い辺の長さを、長い辺の長さから切り取って正方形を作り、この正方形を切り取ってできる残りの矩形が、元の矩形と相似形をなすような矩形になる場合、その矩形の長い辺と短い辺の比で表される。黄金比が上記の値になることは高校生の幾何学の知識があれば容易に証明できる。

黄金比の性質の面白い点をいくつかあげると、フィボナッチの数列の次の数との比は、黄金比G、次の次の数との比は、黄金比の二乗でG+1、すなわち、2.618…次の次の次の数との比は、黄金比の３乗、すなわち、$G^3=G^2+G=2G+1$となり、同様に$G^4=3G+2,\ G^5=5G+3,\ G^6=8G+5,...$と　黄金比のべき数は係数がフィボナッチ数を持つ線形形式で記述できる。また黄金比の逆数、1/GはG－1、すなわち、0.618、また、$1/G^2=1-1/G=0.382$、$1/G^3=2G-3$、$1/G^4=5-3G$、...と、やはりこれも係数がフィボナッチ数をもつ線形形式で表示できることなどがある。

黄金比を持つ矩形は、古来美しい形とみなされ、ギリシャ建築にも用いられていた。このため、黄金比、あるいは黄金分割と呼ばれ、その名前の由来と

なっている。ちなみに、皆さんの家庭にある液晶テレビ画面の縦と横の長さの比は、ほぼ黄金比となっているし、正五角形の対角線の長さと一辺の長さの比も黄金比で表される。

こうしてフィボナッチの数列は、自然界と極めて密接な関係を持っている。フィボナッチの数列が、漸近的に、比率が黄金比の等比級数となっていることは、nが十分大きいとn項目のフィボナッチ数列の数SはG^nで表されることを意味している。これは前項との比が、黄金比となる等比級数列を表している。この等比級数のn項目の値Sを指数関数で表すと、

$$nlnG=lnS=0.4812n;\ S=exp(0.4812n)$$

と書ける。

次に隣同士のフィボナッチの数の比、Gを元利合計とした場合、年率αで、元利合計がGとなるための年数mは

$$mln(1+\alpha)=lnG=0.4812\text{から}\alpha=\frac{0.4812}{m}$$

を得る。例えばm=5、すなわち、５年で元利合計が1.618倍になるための年率は9.624％、あるいはm=8とすると、年率は6.015％、さらにm=13とすると年率は3.70％となる。これらの数字は後ほど使うことになるので記憶しておいて欲しい。

フィボナッチの数列のさらに面白いことは、確率過程でよく使われるマルコフ過程との繋がりである。ある事象がランダムに発生する場合、サイコロの目のように何度振っても出る確率が変わらないものもあるが、親子の例のように、生まれてくる子供の顔形はランダムだが、親に似る確率が高いように、次に起こるランダムな事象が、直前の事象に影響を受けるようなランダムな過程を、マルコフ過程という。

株価や、ファンドの値動き、為替レートなどは、マルコフ過程と思われる。明日の株価は、今日の株価から全く飛び離れた値になるとは考えられないからだ。

しかし、株価が上がるか下がるかは、ほぼランダムである。ランダムでありながら、長期的には、GDPの変動やインフレ率、それに業務の効率化などによって、おおむね指数関数的に（毎年ある一定の割合で）増大している。

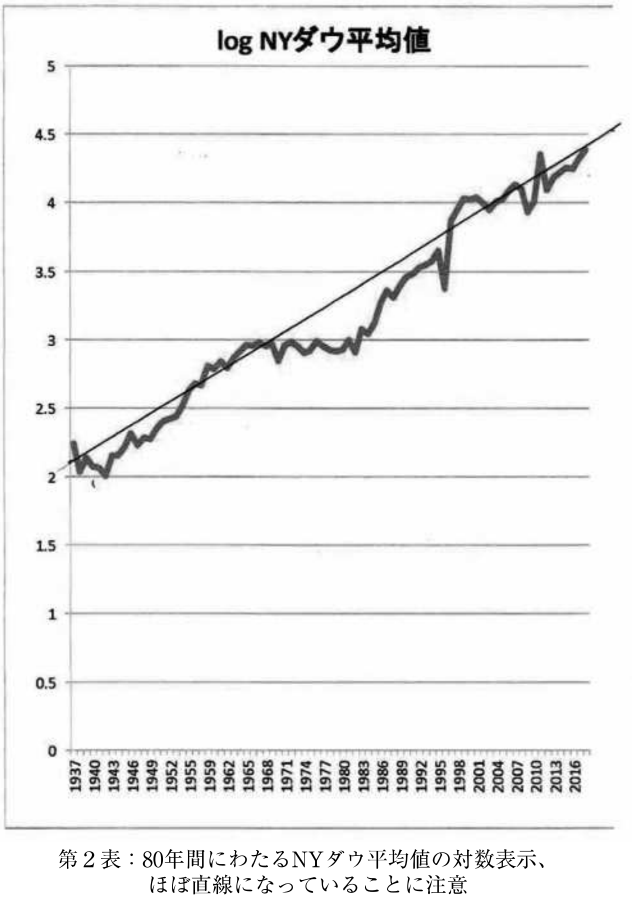
３．フィボナッチ数列とNYダウ平均の関係、市場予測

フィボナッチの数列は、毎回黄金比、G＝1.618倍に増加するが、株価は、毎年６割近くも上がることはまずない。しかし、何年か後には、61.8％ほど上昇することはある。実際のデータ、例えば、NYダウ平均値のように、ほぼ毎年上昇している値を取り、過去何年で黄金比1.618倍になったかを調べてみよう。

下の図は、NYダウ平均値の対数を縦軸に取り、これを80年間に渡って表したものである。

平均値は各年の値の、６月時点のものを採用している。これで分かる通り、NYダウ平均の対数値は、1937年から2017年まで、ほぼ直線的に伸びている。対数目盛りで直線ということは、指数関数的に増大していることを表す。

ちなみに、1937年のNYダウ平均値は、ほぼ200ドル、2017年のそれは、24300ドルで、その対数値は、図の直線の両端の値で示す通りである。この間にNYダウ平均値は121倍になっている。これは黄金比1.618の10乗に相当する値、123に極めて近い。



第２表：80年間にわたるNYダウ平均値の対数表示、ほぼ直線になっていることに注意

1937年から2017年は、80年に相当するから、平均として、もし８年毎に黄金比1.618倍になっていたとすると、80年では、フィボナッチ数は、黄金比の10乗倍になり、実際のNYダウ平均値にほぼ等しくなる。面白いことに８は、フィボナッチ数列の７番目の数である。

４．フィボナッチ年と予測

この事実から、NYダウ平均の値は、80年間にわたり、概ね８年毎に黄金比、G倍、すなわち1.618倍に

なってきたことがわかる。

ここで、何年かけて株価が黄金比、1.618倍になったかの年数を、フィボナッチ年と呼びことにしよう。上記の解析の通り、NYダウの場合、80年間の平均フィボナッチ年は８年である。しかし、実際のダウ平均の値は当然のことながら、この直線が示す値からはずれている。例えば、1937年から1955年頃までは、この直線より下にずれていて、この間ダウ平均値は、８年毎には黄金比にまで達していないことがわかる。

しかし、この間も細かく見ると、1937年から５年間は下落していて、この間にダウ平均は黄金比の逆数、61.8％ほど下落している、つまり、フィボナッチ年は５年、ただしこれは、フィボナッチ数列を逆方向に一つ戻したことになっている。1942年から1965年頃までの23年間には、NYダウは100ドルから1000ドルと10倍になっている。これは、ほぼ黄金比1.618の５乗倍に相当する。25年かかってフィボナッチ級数が５段階進むということは、フィボナッチ年は、25／５＝５年ということになる。つまりこの間、NYダウは、５年ごとに1.618倍になったことを表している。これはそれまでの低迷を回復するために急ピッチで株価が上昇したためである。次に1984年から1999年までの15年間には、ダウ平均は1000ドルから10000ドルと10倍になっている。このことから、この間のフィボナッチ年は15／５＝３年ということがわかる。つまりこの間には、３年ごとにNYダウ平均値は1.618倍になったことを表している。この場合も1984年以前の低迷の回復基調と解釈できる。

こうして見ると、結論として言えることは、NYダウの値は、80年の長期にわたり、平均として８年ごとに黄金比、1.618倍となっていて、この間、200ドルから24500ドルまで上昇していること、途中何度か下げに転じているが、数年後には回復し、この平均としてトレンドに戻っている。回復時には、フィボナッチ年が５年ないし３年のスピードで黄金比分、62％アップになるスピードで上昇をしていることがわかる。

以上の観測結果をまとめると、

1．NYダウ平均値は、80年間にほぼ123倍になっていて、これは、黄金比、G、1.618の10乗、G^{10}にほぼ等しい。この結果は、８年毎にダウ平均値が、黄金比1.618倍（つまり、約62％上昇）になっていることを示しているので、フィボナッチ年は８年となる。
2．実際のダウ平均値は、この８年より短い期間に、1.618倍になっている時期が何度かある。これは、途中で景気後退や、バブル崩壊で株価が下落し、その後に回復して、平均としてフィボナッチ年８年の線に戻るためと解釈できすることができる。
3．回復時には、フィボナッチ年は、３年または５年の急ピッチで回復している。つまり、３年または５年で、株価は62％上昇している。
4．一方下落時には、３年ないし５年で１/G、すなわち0.618％の割合まで落ちている。

これらの過去のデータをベースに、NYダウの将来の予測をしてみよう。まず長期的には、フィボナッチ年８年であることから、８年ごとに1.618倍になると想定できる。分かり易くするためにNYダウ平均が10000円になった時期を標準にして眺めてみよう。この年を基準にすると８年後は16180ドル、16年後は26180ドル、また、８年前は6180ドル、また16年前には3820ドルになっていると想定できる。（$G^2=G+1$、$1/G=G-1$を使う）。ダウ平均がこれらの値になった時期は1990年以降である。各年の６月のダウ平均の値を表にすると次のようになっている。

1996年の6448ドルは推定値の6180ドルに近い。これを基準にすると2004年には10,000ドル、2012年が16180ドルにならないといけないことになる。しかし、2003年にはすでに10,000ドルを超えている。これは2000年のITバブルの結果と解釈できる。次の2012年には、逆に想定値の16180ドルには到達していない。これは、途中リーマンショックが起こったため回復が１年遅れたと推定でき、１年遅れの2013年には16180ドル近くに戻している。フィボナッチ数列の次の値は26180ドルだから以上の結果を用いて予測すると2020年のダウ平均値26180ドルとなると推定できる。しかし実際のNYダウ値は2018年初頭にこの値を突破した。推定より２年ほど早い。このことから、ここしばらくは調整局面に入り2020年に26000ドル台に値を戻すと想定される。

一方1996年の８年前の1988年に戻ると、フィボナッチの予測では3820ドルに対し、実際のNYダウ平均値は2168ドルと大分低くなっている。これは第２表でわかる通りこの時期、1970年代後半から、株価が低迷していたからで、1996年の推定値に向かい1991年から５年間に黄金比,1.618の分上昇している。つまり低迷期にはフィボナッチ年５年のスピードで戻すことがわかる。したがって、長期のトレンドである、フィボナッチ年８年、つまり８年毎に黄金比分上昇する線から下にずれている時には低迷期で、こうした低迷には５年程度で黄金比分上昇する。しかし低迷時でないときにフィボナッチ年が５年とか３年の

年	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
ダウ平均	963.99	875.00	1,046.54	1,258.64	1,211.57	1,546.67	1,895.95	1,938.83	2,168.57	2,753.20
年	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
ダウ平均	2,633.66	3,168.83	3,301.11	3,754.09	3,834.44	5,117.12	6,448.27	7,908.25	9,181.43	11,497.12
年	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ダウ平均	10,787.99	10,021.57	8,341.63	10,453.92	10,783.01	10,717.50	12,463.15	13,264.82	8,776.39	10,428.05
年	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017		
ダウ平均	11,577.51	12,217.56	13,104.14	16,576.66	17,823.07	17,425.03	19,762.60	24,719.22		

単位: US ドル

第３表：1980年以降のNYダウ平均値、各年の値は毎年６月の値を採用

スピードで上昇する場合はバブルと見なすことができる。実際2012年からの動きで、2017年から18年初頭にかけての上昇率は早すぎた。2020年の予想値の26180ドルを2018年１月に突破したのだ。低迷期でもないのに２年前に次の予想値に達するスピードで上昇したのはバブルと判定できる。わたしはNYダウが26180ドルを超えた時点で８割のファンドを売却し利益確定して逃げ延び難を免れた。フィボナッチさまさまである。実際NYダウ平均値は26180ドル付近をピークに急落し、24000ドル台を低迷している。

次に日本株はどうだろう。

第３表は、日経ダウの対数表示である。この表を見ると、NYダウに比べ、はるかに凸凹していてお世辞にも直線（指数関数表示）とは言えない。

その一つの原因は、戦後に日本経済は、急成長期を迎えていたことがあり、さらに1980年後半は、バブル経済を迎え、バブル崩壊後は、長期にわたる経済低迷が続いた結果である。

その意味で、異常な展開を遂げていたとも言える。それに加え、日本人の投資家は、つい最近まで投機手段として株を買っていたため、株価がビットコインのように、心理作用のみによって、ランダムな動きをしていたことが挙げられる。

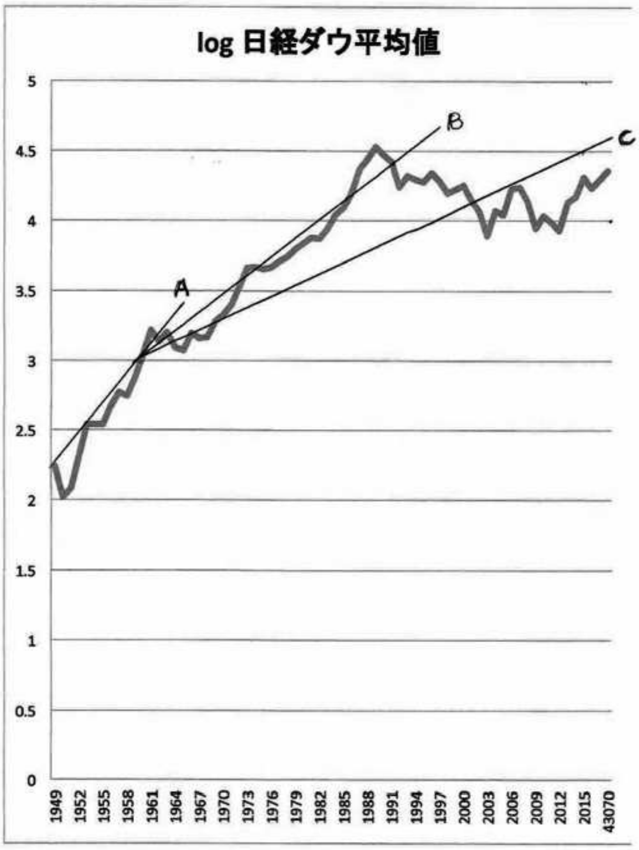
しかし、第２図のデータを見ると、面白いことに、日経ダウも、部分的にはA，B，Cのラインに沿って上昇していることがわかる。

これらの直線は、それぞれフィボナッチ年が３年、５年、８年に相当するもので、それぞれの期間に、日経ダウ平均株価が、それぞれ黄金比に相当する、1.618倍になるのに要した年数を表している。

最も成長率の高いAの線は、所得倍増計画に沿ったもの、続いて成長率の高いBの線は、東京オリンピックから大阪万博に続く好景気の時代。この時代は、1990年のバブル期に繋がり、終焉する。バブル崩壊後は、20年以上の低迷時代を迎える。しかし、東京オリンピックからバブルにつながる以前の時点から、NYダウの上昇率に相当するフィボナッチ年８年線を引くと、面白いことに、ほぼ現在の日経ダウに到達している。

これらのことから、局所的には成長率が大きく変化しているように見える日経ダウも、フィボナッチ数列の性質を維持していることがわかる。ちなみに対数値が、4.4の日経ダウ平均は、10の4.4乗、すなわち２万５千118円を表し、また4.5は３万１千622円を表す。つまり1960年に10の３乗、すなわち千円であった日経ダウは、1980年には10の４乗、つまり、１万円になっていることから、この間に20年で10倍のペース、つまり平均して５年毎に1.618倍のペースで上昇している。

バブル崩壊後の日経ダウは、20年以上も下降、上昇を繰り返し低迷するが、この間の下降も上昇も、ほぼフィボナッチ年５年のペースで変動しているのは面白い。つまり、下降時には、５年で61.8％に、また上昇時には、５年で1.618倍のペースで動いてい



第４表：日経ダウ平均値の対数表示

る。（すでに証明した通り、１/G＝G－１の性質があることに注意）。

結言

NYダウや日経ダウの変動が、フィボナッチの数列に関係していること示した。小説ダビンチコードで紹介されたフィボナッチの数列と黄金比の関係、過去のダウ平均の変動が、フィボナッチの数列と黄金比の性質でうまく表現できる事実などを紹介し、今後の株価の変動の予測に使って見た。フィボナッチの数列は自然界に存在するいろんな現象に関係しているし、数列の隣り合わせの数の比が、黄金比になることも自然界に関係している。さらに、数列がマルコフ過程に関係していることから、過去のデータを使っての株価の動きの予測に使えるのではないかという議論も付け加えた。

（通信　昭和32年卒　34年修士）